

A Morse Index Invariant Reduction of Non-Equilibrium Thermodynamics

Speaker: Leonardo Masci

November 20, 13.30, room 2AB40

Abstract. In this talk I will use a finite-dimensional reduction technique to study some dynamical and geometrical properties of a reaction-diffusion system. This kind of system arises in various disciplines, for example biology, chemistry and thermodynamics. We think of it as a toy-model of non-equilibrium thermodynamics, namely, the *Macroscopic Fluctuation Theory* of G. Jona-Lasinio et al.

A *finite-dimensional reduction* is an analytic technique to extract a finite-dimensional system from a variational problem with mechanical-type action. The finite-dimensional reduction in study is *exact*, meaning that every solution of the variational problem can be reconstructed completely from a solution of the reduced finite-dimensional system, and it respects the *Morse index* of the solutions, that is, the number of negative eigenvalues of the Hessian of the action.

The natural context for the Morse index is recovered by identifying an infinite-dimensional symplectic vector space, in which the action plays the rôle of a generating function with parameters for a Lagrangian submanifold. This way the Morse index of an equilibrium can be interpreted as the Maslov index of a certain curve on the Lagrangian submanifold.

Sommario. In questo seminario applicherò una tecnica di riduzione finito-dimensionale allo studio di alcune proprietà dinamiche e geometriche di un sistema di reazione-diffusione. Tale sistema emerge in varie discipline, come la biologia, la chimica e la termodinamica. In particolare, può essere considerato nel contesto della *Macroscopic Fluctuation Theory* di G. Jona-Lasinio et al. come un modello semplificato di termodinamica del non-equilibrio.

Una *riduzione finito-dimensionale* è una tecnica analitica per estrarre un sistema finito-dimensionale da un problema variazionale meccanico. La riduzione in studio è *esatta*, ovvero ogni soluzione del problema variazionale può essere ricostruita completamente a partire da una corrispondente soluzione del sistema finito-dimensionale, e rispetta l'*indice di Morse* delle soluzioni, ovvero il numero di autovalori negativi dell'Hessiano dell'azione.

Per mettere l'indice di Morse nel suo contesto naturale si costruisce uno spazio vettoriale simplettico infinito-dimensionale e si interpreta l'azione come una funzione generatrice con parametri per una sottovarietà Lagrangiana. In questo modo l'indice di Morse di un equilibrio si può interpretare come l'indice di Maslov di una certa curva sulla sottovarietà Lagrangiana.

References

- [1] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio, and C. Landim. *Macroscopic Fluctuation Theory*. Rev. Mod. Phys. **87**(2) pp.593–636, (2015)
- [2] F. Cardin, G. De Marco, and A. Sfondrini. *Finite Reduction and Morse Index Estimates for Mechanical Systems*. NoDEA-Nonlinear Diff. **18**(5) pp.557–569, (2011)
- [3] F. Cardin, M. Favretti, and A. Lovison. *Inertial manifold and large deviations approach to reduced PDE dynamics*. J. Stat. Phys. **168** pp.1000–1015, (2017)
- [4] F. Cardin, M. Favretti, A. Lovison, and L. Masci. *Stochastic and geometric aspects of reduced reaction-diffusion dynamics*. Ricerche Mat. <https://doi.org/10.1007/s11587-018-0387-7>
- [5] F. Cardin, L. Masci. *A Morse-index invariant reduction of non-equilibrium thermodynamics*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. **29** pp 1–29, (2018)
- [6] J. Deng and C. Jones. *Multi-Dimensional Morse Index Theorems and a Symplectic View of Elliptic Boundary Value Problems*. Trans. Amer. Math. Soc **363**(3) pp.1487–1508, (2011)