

# Una dimostrazione elementare del teorema di Mordell-Weil

Alessandro Guaglianone

24 agosto 2020

## Abstract

In questo seminario daremo una dimostrazione elementare del teorema di Mordell-Weil, che discute la struttura dei punti razionali di una curva ellittica. La ricerca di soluzioni razionali di una qualsiasi equazione polinomiale è un problema che ha interessato i matematici sin dai tempi di Diofanto, primo tra tutti a scrivere una serie di libri di Teoria dei Numeri che discutevano dell'esistenza di soluzioni intere o razionali di alcune equazioni. Se nel caso di polinomi con un'unica variabile la ricerca di soluzioni razionali può essere fatta usando il lemma di Gauss e l'approssimazione numerica, nel momento in cui il polinomio è funzione di due variabili, la ricerca diviene più complessa, soprattutto quando il grado del polinomio è maggiore di 2.

Oggetto di studio sarà questo teorema di Mordell-Weil, il quale afferma come le cubiche lisce dotate di legge di gruppo sono tali da avere i punti a coordinate razionali che formano un gruppo finitamente generato, e il numero di generatori del gruppo coincide con il rango della curva ellittica stessa. Mentre nel caso di un campo generale si ha bisogno di nozioni teoriche avanzate, e si devono distinguere più casi, nel campo  $\mathbb{Q}$  dei razionali avremo bisogno solo di strumenti elementari quali le applicazioni lineari, la funzione altezza canonica e un argomento di discesa infinita per dimostrare questo risultato.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Joseph H. Silverman and John Tate. *Rational Points on Elliptic Curves*. Springer.
- [2] Joseph H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*. New York: Springer, 2009.