

# La soluzione analitica del modello di Trolle-Schwartz

Subtitle

Morin Davide

Dipartimento di Matematica  
Università degli Studi di Padova

March 22, 2021

1. Introduzione
2. Il modello di Heston
3. Il modello di Trolle-Schwartz

# Introduzione

- Dire perchè i modelli a vola costante non vanno bene
- Esporre il modello di Heston
- Esporre la miglioria del modello di Trolle Schwartz
- Ricavare funzione caratteristica
- Far capire come la funzione caratteristica viene poi usata nel pricing
- Far capire che il modello di heston è un caso particolare

# Il modello di Heston

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{v(t)}dW_1(t) \\ dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma_v\sqrt{v(t)}dW_2(t) \end{cases} \quad (\text{H})$$

dove

- $S(t)$  è il prezzo spot del sottostante al tempo  $t$ , governato dal moto browniano  $W_1(t)$  mentre il suo drift è dato dal tasso di interesse costante  $r$
- $v(t)$  è la volatilità stocastica, che segue un processo di tipo CIR (Cox-Ingersoll-Ross)
- I due moti Browniani hanno correlazione istantanea  $\rho$

# Il modello di Trolle-Scwhartz

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \delta(t)dt + \sigma_S \sqrt{v(t)}dW_1(t) \\ dy(t, T) = \mu_y(t, T)dt + \sigma_y(t, T)\sqrt{v(t)}dW_2(t) \\ dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma_v \sqrt{v(t)}dW_3(t) \end{cases} \quad (\text{TS})$$

dove

- $S(t)$  è il prezzo spot del sottostante al tempo  $t$ , governato dal moto browniano  $W_1(t)$  mentre il suo drift è dato dal "instantaneous spot cost of carry rate"  $\delta(t)$
- $y(t, T)$  denota il "forward instantaneous cost of carry rate" con maturità  $T$
- $v(t)$  è la volatilità stocastica
- La correlazione istantanea tra i tre moti Browniani in gioco è data da una matrice  $3 \times 3$  che denoteremo con  $\rho$

# I processi $S, y, v$

- $S$
- $y$  (spiegare bene)
- $v$

$$C(t, T_0, T_1, K) = F(t, T_1)\Pi_1 - KP(t, T_0)\Pi_2 \quad (1)$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[ \frac{e^{-iu \log(K)} \psi(u - i, t, T_0, T_1)}{iu \psi(-i, t, T_0, T_1)} \right] du \quad (2)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[ \frac{e^{-iu \log(K)} \psi(u, t, T_0, T_1)}{iu} \right] du \quad (3)$$

# Theorem

$$\begin{cases} \frac{dC(\tau)}{d\tau} = D(\tau)\kappa\theta \\ \frac{dD(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{2}(u^2 + iu)(\sigma_2^2 + B(T_1 - T_0 + \tau)^2 + 2\rho_{12}\sigma_s B(T_1 - T_0 + \tau)) + \\ (-\kappa + iu\sigma_v(\rho_{13}\sigma_s + \rho_{23}B(T_1 - T_0 + \tau)))D(\tau) + \frac{1}{2}\sigma_v^2 D(\tau)^2 \end{cases} \quad (4)$$




# Figure


Uncomment the code on this slide to include your own image from the same directory as the template .TeX file.


An example of the `\cite` command to cite within the presentation:

This statement requires citation [Sitzia, 2018].

# Bibliografia

 Nicolò Sitzia (2018)  
The analytical solution of the Trolle-Schwartz model  
*Journal Name* 12(3), 45 – 678.

 Heston, S. L. (1993)  
A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options  
*The Review of Financial Studies*

 Trolle, A.B. and Schwartz, E.S. (2009)  
Unspanned Stochastic Volatility and the Pricing of Commodity Derivatives  
*The Review of Financial Studies* vol. 22, n.11, pp. 4423-4461

The End